ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И ЕЕ СОЗДАТЕЛИ

Г.И. Худяков[1]

Представлена формулировка теоремы отсчетов для детерминированных сигналов с ограниченной энергией. Проанализированы относящиеся к этой теореме основные первоисточники и роль их авторов в становлении теории сигналов. Сделан вывод о правомочности названия теоремы отсчетов теории сигналов «теорема Котельникова–Шеннона».

Введение

Теорема отсчетов (*выборок*, *sampling theorem*) теории сигналов широко применяется в радиотехнике, радиофизике, оптике и в других научно-технических областях. Ее значение особенно возросло в последние два десятилетия в связи со всеобщей компьютеризацией и с переходом всей радиоэлектроники на цифровые технологии.

В то же время вопрос о приоритетах создателей теоремы отсчетов долгие годы являлся предметом дискуссий как в нашей стране, так и за рубежом. Для детерминированных сигналов, имеющих непрерывный финитный спектр, в отечественной литературе установилась традиция называть теорему отсчетов *теоремой Котельникова*. В зарубежной литературе эту теорему обычно называют *теоремой Шеннона*. Иногда встречается даже название «теорема Уиттекера–Найквиста–Котельникова–Шеннона». Представляется достаточно интересным проследить историю зарождения и «идейного развития» теоремы, а также познакомиться с краткими биографиями основных ее создателей (см. Приложение). В Приложении мы не приводим биографию В.А. Котельникова, памяти которого посвящена данная статья.

Существует целый ряд теорем отсчетов для различных классов сигналов. По существу содержания эти теоремы следует называть *теоремами дискретизации*, так как они выясняют математические условия, при которых сигналы данного класса могут быть однозначно восстановлены по своим мгновенным значениям в бесконечном множестве эквидистантных или неэквидистантных моментов времени.

Поскольку разные авторы пользуются различными обозначениями одинаковых математических объектов, введем некоторые унифицированные обозначения:

F_m — максимальная частота (низкочастотного) сигнала $s(t)$ с ограниченным по частоте (*финитным*) спектром: $|\dot{S}(\omega)| = 0$ при всех круговых частотах вне диапазона $(-2\pi F_m \le \omega \le 2\pi F_m)$;

$F_д = 1/\Delta t$ — частота (*темп*, *скорость*) дискретизации (*sampling rate*);

Δt — интервал (*шаг*, *период*) дискретизации (*sampling interval*);

$s(t_n) = s_n$ — отсчет (*выборка*, *мгновенное значение*, *sample*) функции $s(t)$ в точке $t_n = a + n\Delta t$;

$\mathrm{sinc}(x) = (\sin x)/x$ — функция отсчетов (*выборок*);

$\Pi(\Omega, \omega) = \mathrm{rect}_\Omega(\omega)$ — коэффициент передачи ФНЧ прямоугольного типа:

$\Pi(\Omega, \omega) = 1$ при $|\omega| \le \Omega$; $\Pi(\omega, \omega) = 0$ при $|\omega| > \Omega$.

---

[1] Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53, № 9. С. 1157–1168.

1. Формулировка теоремы отсчетов

Теорема. Пусть сигнал $s(t)$ как функция времени t ($-\infty < t < \infty$) обладает конечной энергией $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$ и ограниченным по частоте (*финитным*) спектром: $|\dot{S}(\omega)| = 0$ при $|\omega| > 2\pi F_m$.

Тогда сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде ряда Э. Уиттекера

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \operatorname{sinc}(\pi F_4(t - t_n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a + n\Delta t)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - a - n\Delta t)\right), \tag{1}$$

где a — произвольное действительное число, $F_д = (1/\Delta t) \geq 2F_m$, а ряд (1) в каждой точке t сходится *среднеквадратически*.

При этом $E_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2$, где $\Omega_m = 2\pi F_m$.

Доказательство. Поскольку $E_s <\infty>$, т.е сигнал $s(t)$ принадлежит действительному гильбертову пространству $L_2(t)$, то он имеет преобразование Фурье (спектральную плотность, или *спектр*)

$$\dot{S}(\omega) = \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} s(t)\exp(-i\omega t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-i\omega t)dt\,.$$

В силу финитности спектра $\dot{S}(\omega)$ его можно периодически продолжить вне интервала круговых частот $|\omega| > \Omega_m$ с некоторым периодом $(2\Omega) \geq (2\Omega_m)$.

Получим

$$\dot{S}_\Omega(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \exp\left(-jk\frac{\pi}{\Omega}\omega\right),$$

где

$$\dot{C}_k = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \dot{S}_\Omega(\omega)\exp(jk\frac{\pi}{\Omega}\omega)d\omega = \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \dot{S}(\omega)\exp(jk\frac{\pi}{\Omega}\omega)d\omega.$$

Чтобы спектр сигнала $s(t)$ оставался прежним, функцию $\dot{S}_\Omega(\omega)$ следует умножить на определенную выше функцию $\Pi(\Omega, \omega)$

$$\dot{S}(\omega) = \Pi(\Omega,\omega)\dot{S}_\Omega(\omega) = \Pi(\Omega,\omega)\sum_{-\infty}^{\infty}\dot{C}_k \exp\left(-jk\frac{\pi}{\Omega}\omega\right).$$

По теореме о произведении преобразования Фурье (о свертке)

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\Omega,\omega)\dot{S}_\Omega(\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - t')s_\Omega(t')dt'. \tag{2}$$

Здесь

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\Omega,\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\exp(j\omega t)d\omega = \frac{\sin(\Omega t)}{\pi t};$$

$$s_\Omega(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_\Omega(\omega)\exp(j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\dot{C}_k \exp\left(-jk\frac{\pi}{\Omega} + j\omega t\right)d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\infty}\dot{S}(\omega')\exp\left(jk\frac{\pi}{\Omega}\omega'\right)d\omega \times \exp\left(-jk\frac{\pi}{\Omega}\omega + j\omega t\right)d\omega.$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования, получаем

$$s_\Omega(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega') \exp\left(jk\frac{\pi}{\Omega}\omega'\right) d\omega' \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-jk\frac{\pi}{\Omega}\omega + j\omega t\right) d\omega =$$

$$= \frac{\pi}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(k\frac{\pi}{\Omega} - t\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega') \times \exp\left(jk\frac{\pi}{\Omega}\omega'\right) d\omega' = \frac{\pi}{\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k\frac{\pi}{\Omega}\right) \delta\left(k\frac{\pi}{\Omega} - t\right).$$

Подставив полученные для $h(t)$ и $s_\Omega(t)$ выражения в формулу (2), имеем

$$s(t) = \frac{\pi}{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega(t - t'))}{\pi(t - t')} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k\frac{\pi}{\Omega}\right) \delta\left(k\frac{\pi}{\Omega} - t'\right) dt'.$$

Снова меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем окончательно

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(k\frac{\pi}{\Omega}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(\Omega(t - t')) \delta\left(k\frac{\pi}{\Omega} - t'\right) dt' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k\Delta t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - k\Delta t)\right),$$

где $\Delta t = \pi/\Omega$ — интервал дискретизации.

Поскольку $F_д = 1/\Delta t = 2\Omega/(2\pi) = \Omega/\pi$, $\Omega_m = 2\pi F_m$ и $\Omega \geq \Omega_m$, то $F_д \geq (2F_m)$ или $\Delta t \leq \Delta t_{макс}$, где $\Delta t_{макс} = 1/(2F_m)$ называется *интервалом Найквиста.*

Сдвиг начала координат по оси времени ($-\infty < t < \infty$) на величину a ничего принципиально нового в разложение (3) не вносит: просто изменяется начало отсчета времени.

Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum s_k s_j \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - a - k\Delta t)\right) \times$$

$$\times \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t - a - j\Delta t)\right) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi}{\Delta t} t\right) dt = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k^2 = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^2(a + k\Delta t).$$

Теорема отсчетов для детерминированных сигналов с конечной энергией доказана.

Подчеркнем, что *обратная теорема несправедлива*: если некоторая функция $f(t)$ представлена в виде ряда (1), то она может не иметь преобразования Фурье вовсе. Значит, финитность спектра функции $f(t)$ является условием, *достаточным* для возможности ее представления в виде ряда Э. Уиттекера (1), но *не необходимым.*

Сигналы с ограниченной энергией и финитным спектром принадлежат к одному из частных видов так называемых *гильбертовых функциональных пространств с воспроизводящим ядром* (ГПВЯ, [1]). Аналогичные теоремы отсчетов существуют и для узкополосных высокочастотных сигналов (радиосигналов), для стационарных и некоторых нестационарных случайных процессов, для пространственно-временных сигналов, а также для различных процессов при *неэквидистантных* отсчетах.

2. Математические основания теорем отсчетов. Кардинальные функции Э. Уиттекера

То, что функция $f(t) = (\sin x)/x$ обладает финитным спектром, первым обнаружил, по-видимому, в 1897 г. выдающийся французский математик Эмиль Борель (1871–1956) [2]; однако он не сделал из этого факта далеко идущих выводов.

После Э. Бореля его ровесник, всемирно известный английский математик, астроном и историк сэр Эдмунд Уиттекер в 1915 г. [3] рассмотрел функции $f(x)$, заданные своими значениями (отсчетами) $\{f(x_k)\}_{-\infty}^{\infty}$ *в бесконечном множестве эквидистантных узлов интерполяции* (..., $f(a-2w)$, $f(a-w)$, $f(a)$, $f(a+w)$, $f(a+2w)$, ...,), где a — произвольное действительное число. При этом Уиттекер не предполагал, что величины $f(a+kw)$ по модулю уменьшаются, если $|k| \to \infty$. Это значит, что в общем случае функция f(x) может быть неинтегрируемой на бесконечности и тем более может не иметь преобразования Фурье в обычном смысле.

Через множество отсчетов можно провести сколько угодно «сотабличных» (*«cotabular»*) функций самого различного характера. Однако, как доказывает Уиттекер, существует *одна единственная функция*, которая однозначно определяется системой отсчетов $\{f(a+kw)\}_{-\infty}^{\infty}$ и которую он называет **основной** (*кардинальной*, *cardinal function*) для системы $\{f(a+kw)\}_{-\infty}^{\infty}$. Эта функция имеет вид

$$C(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(a+kw)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{w}(x-a-kw)\right).$$

Если кардинальная функция $C(x)$ имеет преобразование Фурье $\mathscr{F}[C(x)]$ т.е как минимум интегрируема по модулю на бесконечности, то это преобразование *финитно*, т.е $\mathscr{F}[C(x)] = 0$ при $F > 1/(2w)$. При этом *единственность* кардинальной функции $C(x)$ определяется *точным равенством* $F = 1/(2w)$.

В унифицированных обозначениях: $f(t) = s(t)$; $x = t$; $w = \Delta t$; $F = F_m$;

$$C(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} s(a+k\Delta t)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-k\Delta t)\right).$$

В заключение Уиттекер отмечает ([3], с. 194):

«С некоторых пор прикладные математики выражали недовольство тем, что результаты Чистой Математики становятся с каждым днем все сложнее и непонятнее. Это делает чистую математику все более недоступной прикладному математику..., который руководствуется интуицией и геометрическими представлениями.

...Кажется вероятным, что некоторых из таких трудностей можно избежать введением функции, аналогичной «кардинальной функции», которая была бы более простой, чем обсуждавшиеся выше, но которая была бы равна ей в бесконечном числе значений переменной и могла бы *представлять ее во всех практических и в некоторых теоретических исследованиях* [курсив наш. — *Г.Х.*]».

Исследования по «кардинальным функциям» и их применениям в *теории интерполяции* продолжил в 1924 г. Уильям Феррер, приглашенный в Эдинбургский университет Э. Уиттекером. В статьях [4, 5] Феррер исследует основные свойства кардинальных функций $C(x)$ (условия их сходимости) и устанавливает очень важное их свойство — «самосогласованность» (*consistency* — [5; 6, с. 68]): если для данного множества $\{f(x_k)\}_{-\infty}^{\infty}$ построить кардинальную функцию $C(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a+kw)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{w}(x-a-kw)\right)$, то для $w' < w$ и $b \neq a$ имеет место равенство $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C(b+mw')\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{w'}(x-b-mw')\right) = C(x)$ при условии, что для множества $\{f(x_k)\}_{-\infty}^{\infty}$ сумма $\sum_{k=1}^{\infty}(|f(x_k| + |f(x_{-k}|)/k$ — конечная величина.

Итоги развития теории интерполяции, в том числе с помощью кардинальных функций Э. Уиттекера, подвел его средний сын Джон Уиттекер в монографии

1935 г. [6], на которую позже будет ссылаться К. Шеннон. Монография оказалась настолько фундаментальной, что в 1964 г. было осуществлено ее репринтное переиздание.

Наиболее важный результат, с точки зрения его отношения к теореме отсчетов, Дж. Уиттекер получил в 1929 г. Он состоит в следующем ([6], с. 68):

Для произвольной функции $f(x)$ вводится ряд (см. [6, формула (11.21)]):

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{f(n)}{x-n}+\frac{f(-n)}{x+n}\right)\right]. \tag{4}$$

Затем доказывается Теорема (см. [6, теорема 16, формула (11.22)]):

«Для функции $f(x)$ имеющей вид

$$\int_0^1\{\cos(\pi xt)d\Phi(t)+\sin(\pi xt)d\Psi(t)\}, \tag{5}$$

где $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — непрерывные функции, ряд (11.21) [здесь (4). — *Г.Х.*] суммируем, и его сумма равна $f(x)$».

В выражении (5) [6, (11.22)] Дж. Уиттекер использует так называемый «интеграл Фурье–Стилтьеса», фигурирующий в «чистой» математике. Если перевести данную *теорему* с языка «чистой» математики на язык прикладной, то из этой теоремы можно получить такое следствие.

Пусть функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ — дифференцируемы; тогда

$$\int_0^1\{\cos(\pi xt)\varphi(t)dt+\sin(\pi xt)\psi(t)dt\},$$

где $\varphi(t)=d\Phi(t)/dt$, $\psi(t)=d\Psi(t)/dt$.

Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле. Тогда

$$\varphi(t)=\int_0^{\infty}\cos(\pi xt)(f(x)+f(-x))dx,$$

$$\psi(t)=\int_0^{\infty}\sin(\pi xt)(f(x)-f(-x))dx,$$

т.е функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ являются косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$. При этом $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ «не содержат частот, имеющих период менее двух единиц переменной x» ([6], с. 65: роль частоты играет здесь переменная $t/2$, а времени — x).

Тогда, после соответствующих упрощений, ряд (4) [6, (11.21)] будет иметь вид

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\operatorname{sinc}(\pi(x-n)).$$

В унифицированных обозначениях

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(n\Delta t)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(x-n\Delta t)\right)\ \text{при } \Delta t=1.$$

В сочетании со свойством «самосогласованности» кардинальных функций (Феррер, 1929 г. [5]) можно таким образом реконструировать теорему отсчетов теории сигналов *задним числом*, что не представляется корректным с точки зрения истории развития математических идей.

3. Теорема отсчетов В.А. Котельникова

Рассмотрим теоретическую работу почти ровесника Дж. Уиттекера 24-летнего аспиранта, инженера В.А. Котельникова «О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи» [7, 8].

После краткой и четкой постановки задачи, определенной названием работы, Котельников формулирует ряд теорем.

«Теорема I. Любую функцию $F(t)$, состоящую из частот от 0 до f_1 периодов в секунду, можно представить рядом

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \frac{\sin[\omega_1(t - k/(2f_1))]}{t - k/(2f_1)}, \tag{6}$$

где k — целое число; $\omega_1 = 2\pi f_1$; D_k — постоянные, зависящие от $F(t)$.

При этом $D_k = F(k/(2f_1))/\omega_1$.

Из-за нечеткости понятия «состоящая из частот» Котельников добавляет: «И наоборот, любая функция $F(t)$, представленная рядом (6), состоит лишь из частот от 0 до f_1 периодов в секунду».

При доказательстве он предполагает, что функция $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле и интегрируется в пределах $(-\infty < t < \infty)$. Однако функция, представленная рядом (6), может не удовлетворять этим условиям и не иметь обычного преобразования Фурье.

В унифицированных обозначениях:

$$F(t) = s(t);\ f_1 = F_m;\ \Delta t = 1/(2f_1).$$

Интересна также его теорема III:

«Можно непрерывно и равномерно передавать произвольные числа D_k со скоростью N чисел в секунду при помощи функции $F(t)$, имеющей слагаемые на частотах, бóльших $f_1 = N$, сколь угодно малыми».

Пятью годами ранее и более подробно, вплоть до физической реализуемости, вопрос о скорости передачи сообщений рассмотрел Г. Найквист в работе [9], исходя из иных теоретических соображений (см. ниже).

Хотя I Всесоюзный съезд по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, на котором с докладом по работе [8] он должен был выступить, не состоялся, издательство Управления связи РККА отпечатало 3000 экз. полного текста этого доклада и выпустило его в открытую продажу по цене 1 р. 35 коп. Автор понимал теоретическое и особенно практическое значение этой работы и попытался опубликовать ее в виде статьи в общедоступном научно-техническом журнале «Электричество». Однако редакция журнала 11.10.1936 г. прислала Котельникову официальный отказ «из-за перегруженности портфеля и узкого интереса данной статьи, учитывая профиль нашего журнала» ([7], с. 757).

Кстати, история с опубликованием работ В.А. Котельникова повторилась. В 1947 г. в Московском энергетическом институте (МЭИ) он защитил докторскую диссертацию на тему «Теория потенциальной помехоустойчивости». Попытка лауреата двух Сталинских премий I степени, доктора технических наук, профессора В.А. Котельникова опубликовать результаты своих теоретических исследований в виде монографии в издательстве «Связьиздат» успехом также не увенчалась [7]. И только в 1956 г., когда В.А. Котельников был избран действительным членом АН СССР и назначен директором Института радиотехники и электроники (ИРЭ) АН СССР, а за рубежом появились аналогичные работы, монография [10] увидела свет и вскоре была переведена на английский и многие другие иностранные языки.

По поводу работы [8] немецкий исследователь Ганс Люк в 1999 г. написал:

«Поскольку эта замечательная работа никогда не была опубликована в интернационально доступной печати, публикации теоремы отсчетов в теоретически точной формулировке возникали в литературе по технике связи независимо друг от друга» (цит. по: [7], с. 757).

И хотя в «интернационально доступной печати» Котельникову опубликоваться своевременно не удалось, нельзя считать, что работа [8] никак не повлияла на мировое развитие теоретической радиотехники. Во-первых, она была издана в открытой печати тиражом 3000 экз. и могла изучаться как отечественными, так и зарубежными специалистами. Во-вторых, с 1933 г. В.А. Котельников не только преподавал в МЭИ, но и руководил коллективами радиоспециалистов: сначала в НИИ Связи, затем в ОКБ МЭИ, затем в ИРЭ АН СССР. Им было воспитано несколько поколений теоретиков, которые знали теорему отсчетов и активно участвовали в развитии теоретической радиотехники и радиофизики на мировом уровне.

Мог ли знать Котельников о «кардинальных функциях», о работах отца и сына Уиттекеров [3, 11, 12] 1915 г. и 1929 г., а также У. Феррера [4, 5] 1925 г. и 1927 г.? Поскольку МГУ, в котором параллельно с МЭИ обучался и часто бывал Котельников в 1927–1930 гг., выписывал журнал «Proc. Roy. Soc. Edinburgh», — вероятно, мог. Однако от знакомства с элементами еще только складывающейся *чисто математической теории интерполяции* — до четкой и ясной формулировки и доказательства *теоремы отсчетов теории сигналов и ее прикладной интерпретации* нужно было пройти, как показано в разд. 2, целый ряд творческих этапов. В компании «Белловские телефонные лаборатории» (БТЛ) эти этапы связаны с именами трех крупных ученых XX в.: Г. Найквиста, Р. Хартли и К. Шеннона.

4. Максимальная скорость телеграфирования. Гарри Найквист

В 1924 г. Гарри Найквист опубликовал работу «Некоторые факторы, влияющие на скорость телеграфирования», в которой он сформулировал *эвристическое* положение ([13], с. 332–333): «Скорость, с которой сообщение может передаваться по телеграфной линии, имеющей заданную... частоту следования элементарных посылок, может быть определена приблизительно следующей формулой...

$$W = K \lg m,$$

где W — скорость передачи сообщения, m — число уровней тока [используемых в многоуровневой телеграфии. — *Г.Х.*], K — константа». Отметим, что Найквист в 1924 г. использует термин *intelligence* (*сообщение*), а не *information* (*информация*).

Ральф Хартли в 1928 г. на основании анализа переходных процессов в телеграфной системе пришел к следующему *качественному* выводу:

«...максимальная скорость передачи информации, возможная в системе, частотный диапазон которой ограничен некоторой областью, пропорциональна ширине этой полосы частот. Отсюда и следует, что общее количество информации, которое может быть передано посредством такой системы, пропорционально произведению передаваемой полосы частот на время, в течение которого система используется для передачи» (цит. по рус. перев.: [14], с. 24). Хартли использует уже термин *information*.

В фундаментальной статье [9] 1928 г. Г. Найквист пишет (с. 617):

«Чтобы определить степень искажения телеграфных сигналов, нужно рассчитать переходные процессы в телеграфной системе. Этот метод использовался различными авторами [ссылки на труды которых отсутствуют. — *Г.Х.*], а их решения справедливы для телеграфных систем с простыми начальными условиями <...> Статья «атакует» эту же проблему с альтернативной точки зрения: с использованием характеристик установившегося режима в системе».

Найквист вводит следующие важные понятия: форма телеграфной волны $f(t)$ (*waveform*); амплитудный множитель a_h (*magnitude factor*); скорость телеграфирования s (*speed of signaling*), равная величине, обратной длительности элементарной посылки $\tau_э$, деленной на два.

В проводной телеграфной системе элементарный сигнал на входе $s_{вх}(t)$ — прямоугольный импульс длительностью $\tau_э$ с амплитудой $+A$, $-A$ или 0. Он имеет спектр $S(\omega) = A\tau_э\mathrm{sinc}(\omega\tau_э/2)$ (система «без возвращения к нулю и без постоянной составляющей» [15]).

Телеграфный канал в первом приближении можно считать фильтром нижних частот с частотой среза F_N. Поэтому на выходе системы сигнал $s_{вых}(t)$ по отношению к входному сигналу $s_{вх}(t)$ будет «затянутым», и часть энергии предыдущих сигнальных элементов будет попадать в интервал времени, отведенный для текущего элемента, что вынуждает *уменьшать скорость телеграфирования* (поступления на вход телеграфного канала элементарных посылок), т.е. подавать элементарные посылки с частотой $(0{,}5...0{,}7)F_N$.

Однако Найквист отмечает такой *математический факт*. Пусть сообщение представляет собой (псевдослучайную) последовательность элементарных посылок с одинаковыми длительностями $\tau_э$ и с различными амплитудами $a_1, a_2, ..., a_h, ..., a_N$. Если эту последовательность периодически продолжить до бесконечности в обе стороны оси времени и построить для такой периодической последовательности ряд Фурье, то, несмотря на бесконечное число членов этого ряда, только N из них будут независимыми и определяться совокупностью значений $\{a_h\}_1^N$. Если определить на приемном конце телеграфной линии амплитуды $N/2$ косинусных и $N/2$ синусных составляющих переданного сообщения, то можно определить все N амплитудных коэффициентов $a_1, a_2, ..., a_h, ..., a_N$, а значит, восстановить все переданное сообщение.

Поскольку период построенной последовательности $T = N\tau_э$ а основная частота $F_0 = 1/T$, то при любом конечном значении N максимальная частота F_m из серии независимых составляющих с частотами $F_0, 2F_0, ..., F_m$ определяется равенствами $F_m = N\,F_0/2 = N/(2T) = 1/(2\tau_э)$.

Значит, *теоретическим пределом скорости телеграфирования* $s = 1/(2\tau_э)$ *по многоуровневому телеграфу, имеющему канал передачи с частотой среза* F_n, *является значение* $s = F_n$, *а длительность элементарной посылки* $\tau_э$ *не может быть меньше чем* $1/(2F_n)$.

Некоторые авторы усматривают в этом выводе Найквиста эвристическую формулировку теоремы отсчетов, хотя из рассмотренного рассуждения Найквиста мы видим, что для такого заключения нет оснований.

Спрашивается, каким же образом реализовать этот теоретический предел? Найквист переходит к анализу во временной области и, как истинный инженер-изобретатель, вводит неожиданный, но почти очевидный критерий отсутствия *межсимвольных искажений*. Он замечает, что если на выходе телеграфного канала, на который поступают прямоугольные (элементарные) посылки с различными амплитудами из множества $\{a_k\}_1^m$ (многоуровневая телеграфия), измеряются мгновенные напряжения (или токи) в середине каждой посылки и если измеренные напряжения будут пропорциональны этим амплитудам, то на выходе канала можно вырабатывать последовательности прямоугольных посылок, подобные входным последовательностям. В таком случае, несмотря на межсимвольную интерференцию, имеющуюся на выходе телеграфного канала с ограниченной полосой пропускания F_N передача сообщений будет неискаженной.

В Приложении II-A к статье [9] Найквист показывает, что такому критерию удовлетворяет канал, который имеет равномерную частотную характеристику в диапазоне частот от нуля до $F_N = s = 1/(2\tau_э)$. На выходе такого канала вклад всех элементарных посылок, предшествующих данной посылке, в середине временного интервала, который соответствует текущей посылке, нулевой.

Однако такая частотная характеристика телеграфного канала нереализуема. Поэтому Найквист доказывает, что если к идеальной прямоугольной характеристике добавить симметричный относительно F_N (с точностью до знака) член, то получившийся телеграфный канал с «частичнокососимметричным» коэффициентом передачи также не будет вносить межсимвольных искажений и будет передавать сообщения со скоростью s, близкой к величине F_N, что в 2...3 раза превышает скорость телеграфирования в обычном двухуровневом телеграфе. Правда, для этого в телеграфной системе должна производиться сложная синхронная обработка сигналов.

В Приложении II-B к статье [9] Найквист приводит простой пример реализации телеграфной системы, которая может передавать сообщения со скоростью $1/\tau_э \approx 2F_N$ без межсимвольных искажений. При поступлении прямоугольных посылок на вход такой системы на ее выходе получаются сигналы, представляющие собой затухающие колебания с эквидистантным расположением своих нулевых переходов (как у функции отсчетов!), что и обеспечивает неискаженную передачу сообщений с предельно возможной скоростью.

Далее Найквист получает аналогичные результаты для многоканального телеграфа с частотным разделением каналов, рассматривает телеграфию с произвольной формой элементарных посылок и эквивалентность (дуальность) временного анализа и частотного. Тем самым он полностью решает вопрос о значении коэффициента K в формуле $W = K \lg m$: величина K не может превосходить величину $2F_N$, но может быть достаточно близкой к ней.

Наконец, он возвращается к оценке возможного числа уровней m, используемых для многоуровневой телеграфии. Он приходит к выводу, что число m ограничивается двумя факторами: максимально возможными (в данной телеграфной системе) уровнями токов или напряжений и уровнями электрических помех. Найквист заключает ([9], с. 290): «Если помеха непредсказуема, ее абсолютная величина должна быть меньше, чем половина разности между любыми двумя уровнями тока, используемыми для телеграфирования».

Отсюда непосредственно следует формула (Найквист почему-то ее не приводит):

$$W = 2F_N \lg(I_{макс}/I_п + 1),$$

где W — скорость передачи сообщений (мы бы сказали: информации); F_N — частота среза частотной характеристики телеграфного канала; $I_{макс}$ — максимально допустимый ток в телеграфной линии; $I_п$ — максимальный уровень помех в ней.

Как видим, роль Г. Найквиста в разработке *теории информации* аналогична роли М. Фарадея в разработке электродинамики: К. Шеннону *«оставалось только обобщить»* результаты Найквиста и провести их строгое математическое обоснование. И хотя содержание статьи Найквиста [9] 1928 г. *не имеет прямого отношения к теореме отсчетов*, ее результаты являются выдающимися, что по достоинству было оценено лишь в конце 1980-х годов [15].

Аналогичные Г. Найквисту результаты в части предельной скорости телеграфирования (но не теории информации!) приблизительно в это же время получили немецкий ученый Карл Кюпфмюллер и его ученик Х. Раабе [2].

Последний шаг в формулировке и доказательстве теоремы отсчетов за рубежом был сделан в 1940 г. (см. [16]) младшим коллегой Г. Найквиста по БТЛ выдающимся инженером-связистом и математиком Клодом Шенноном. Публикация теоремы отсчетов задержалась до 1949 г., а в это время теорема была независимо от Шеннона опубликована в японской технической литературе Сомейей и в английской — Вестоном (см. [2]).

5. Теорема отсчетов К. Шеннона

К. Шеннон формулирует теорему отсчетов следующим образом ([16], с. 435). «Теорема 1: *Если функция* $f(t)$) *не содержит частот выше W Гц, она полностью определяется своими мгновенными значениями в моменты, отстоящие друг от друга на* $1/(2W)$ с».

Тут же он пишет: «Это общеизвестный в теории связи факт [видимо, в среде специалистов БТЛ. — *Г.Х.*] (...) Математическое доказательство, показывающее, что это положение верно не только приблизительно, но и в точности, состоит в следующем. Пусть $F(\omega)$ есть спектр функции $f(t)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega)\exp(-j\omega t)d\omega ...»$$

И далее К. Шеннон доказывает теорему отсчетов приблизительно так же, как *восемью годами ранее* В.А. Котельников доказывал свою теорему I. В результате Шеннон получает следующее:

«Пусть x_n есть n-й отсчет. Тогда функция $f(t)$ представляется как

$$f(t) = \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{\sin(\pi(2Wt-n))}{\pi(2Wt-n)}.»$$

В унифицированных обозначениях: $W = F_m$.

Отметим, что в редакцию американского Института радиоинженеров (IRE, впоследствии IEEE) статья [16] поступила 23 июля 1940 г., а опубликована в 1949 г.: у 24-летнего «доктора философии в области математики» так же, как и у 24-летнего инженера В.А. Котельникова, с публикацией теоремы отсчетов *«были проблемы»*!

Далее ([15], с. 437) Шеннон замечает: «Теорема 1 была первоначально дана в других формах математиками, но, несмотря на ее очевидную важность, не приводилась в литературе по теории связи... Найквист отметил важное значение интервала $1/(2W)$ для телеграфии; здесь этот интервал будет называться интервалом Найквиста, соответствующим полосе W».

При этом Шеннон ссылается не на статью 1915 г. [3] Э. Уиттекера и не на статьи 1925 г. и 1927 г. У. Феррера [4, 5], а на монографию 1935 г. [6] сына

Уиттекера — Дж. Уиттекера, имея в виду, по-видимому, его Теорему 16 (см. разд. 2). А Найквиста он упоминает в связи со знаменитой статьей 1928 г. [9] и, при всем уважении к старшему коллеге по БТЛ, *не приписывает ему математической формулировки теоремы отсчетов.*

Восемью годами позже Шеннон использует представление (1) для определения одного частного вида стационарного случайного процесса ([17], с. 292):

«Ансамбль

$$f(a_i,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin(\pi(2Wt-n))}{\pi(2Wt-n)},$$

где a_i распределены нормально и независимо и все имеют одно и то же стандартное отклонение $\sqrt{N}$. Это есть одно из представлений «белого» шума с полосой частот от 0 до W герц и со средней мощностью N».

Точнее было бы здесь написать:

Ансамбль

$$f_i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{in} \frac{\sin[\pi(2W(t-a)-n)]}{\pi(2W(t-a)-n)};\quad i=1,2,...,$$

где a — произвольное действительное число; a_{in} — распределены нормально и независимо и все имеют одну и ту же дисперсию N...

При этом можно полагать, что ансамбль $\{f_i(t)\}_1^\infty$ соответствует множеству «кардинальных функций» Э. Уиттекера и является *одним из обобщений теоремы отсчетов* — для случая стационарных случайных процессов.

Заключение

В теории интерполяции функций (Эдмунд Уиттекер, 1915 г.): частота следования узлов интерполяции $1/\Delta t = (2F_m)$. *В теории телеграфных систем* (Г. Найквист, 1928 г.): частота следования элементарных посылок $(1/\tau_э) \le (2F_N)$. *В теории сигналов* (В.А. Котельников, 1933 г.): частота дискретизации $F_Д = (1/\Delta t) \ge (2F_m)$. Несмотря на *формальное сходство* указанных математических соотношений, *содержание* результатов исследований этих авторов *по существу различны*. В работе инженера-изобретателя и физика Г. Найквиста [9] математическая формулировка теоремы отсчетов отсутствует, поскольку его результаты относятся к методам построения (*нелинейной*) системы передачи дискретных сообщений по узкополосному каналу связи, которые обеспечивают максимальную скорость передачи элементарных посылок. Работы «чистых» математиков: отца и сына Уиттекеров [3, 6, 11, 12] и У. Феррера [4, 5] — относятся к одному из возможных методов интерполяции произвольных функций. Теорема отсчетов и ее различные обобщения относятся к одному из ортогональных представлений детерминированных и случайных функций, получивших широкое применение в теории сигналов.

Фонд Эдуарда Рейна (Германия), который отмечал выдающиеся научные достижения XX в. и который удостоил К. Шеннона в 1991 г. премии за теорию информации, справедливо присудил В.А. Котельникову в 1999 г. премию «За впервые математически точно сформулированную и опубликованную теорему отсчетов». В 2000 г. американский Институт электро- и радиоинженеров, в трудах которого в 1949 г. была опубликована статья К. Шеннона 1940 г. [16], удостоил В.А. Котельникова Золотой медали А. Белла.

Учитывая отмеченное в разд. 5 обобщение К. Шенноном теоремы отсчетов на стационарные случайные процессы, а также широкий резонанс, вызванный за рубежом его переоткрытием теоремы в 1940 г., следует теорему отсчетов теории сигналов называть именами В.А. Котельникова — с приоритетом 19.11.1932 г. (в этот день была подписана к печати работа [8]) и К. Шеннона — с приоритетом 23.07.1940 г. А учитывая отмеченные в разд. 2 и 4 достижения Уиттекера (1915 г.) и Найквиста (1928 г.), следует при формулировке и доказательстве теоремы отсчетов называть представление (1) рядом Э. Уиттекера (при $a \neq 0$), а максимально возможный интервал дискретизации $\Delta t_{\text{макс}} = 1/(2F_m)$ — по предложению К. Шеннона ([16], рус. пер. с. 437) — интервалом Найквиста.

Таким образом, *вопрос о приоритете создателей теоремы отсчетов представляется решенным*, хотя обсуждение этого вопроса все еще продолжается (см. [18]).

Приложение. Краткие научно-биографические данные

1. Сэр Эдмунд Тейлор Уиттекер (Edmund Taylor Whittaker) [19, 20] родился 24 октября 1873 г. в г. Саутпорт близ Ливерпуля, графство Ланкашир (Великобритания). Он был единственным сыном дворянина Джона Уиттекера и Селины Септимы — преподавателя физики из г. Мидлтон (близ Манчестера). Отец Селины Эдмунд Тейлор был доктором медицины.

До 11 лет единственным учителем Эдмунда была его мама. В 1884 г. он поступил в Манчестерскую среднюю школу с классическим преподаванием; однако в старших классах охотно согласился перейти на математическую специализацию.

В 1891 г. Эдмунд поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета. На квалификационном экзамене по математике Эдмунд добился первого места, получил медаль Тайсона и был оставлен при университете стипендиатом, занимающимся исследовательской работой в Тринити-колледже (1896 г.). В 1896 г. Э. Уиттекер начал читать лекции в Кембриджском университете.

В 1897 г. Уиттекер был удостоен премии Смита I степени за исследование «равномерных функций». В 1905 г. он был избран членом Лондонского Королевского общества. В 1906 г. — профессором астрономии в Дублинском университете с титулом Королевского астронома Ирландии. С 1912 по 1946 г. Уиттекер — профессор математики в Эдинбургском университете. Там же им была создана университетская математическая лаборатория и основано Эдинбургское математическое общество.

В 1945 г. Э. Уиттекер был посвящен в рыцари.

Сэр Эдмунд внес большой вклад в «чистую» математику: теория интерполяции и автоморфных функций, теория потенциала и специальных функций (в том числе — его имени). Он обосновал формулу Ньютона-Гаусса и метод градуировки («подгонки», «припассовки», *adjustment*) результатов наблюдений к теоретической зависимости.

Три научные работы Уиттекера оказали большое влияние на развитие математики XX в.: «Курс современного анализа» (1902 г., совместно с Дж. Ватсоном); «Исследования по аналитической динамике частиц и твердых тел» (1904 г.); «Математическая обработка результатов наблюдений» (1924 г., совместно с Г. Робинсоном). Интересна также его научно-историческая монография «История теорий эфира и электричества».

Скончался сэр Эдмунд Уиттекер 24 марта 1956 г. в Эдинбурге.

2. Уильям Леонард Феррер (William Leonard Ferrar) [21] родился 21 октября 1893 г. в г. Бристоль (Великобритания).

В 1912 г. Билл (уменьшительное от Уильям) поступил в Оксфордский Королевский колледж — после получения хорошего образования в Бристольской средней школе, где его учитель математики внушил ему любовь к «чистой» математике. В 1914 г. он одержал победу в борьбе за персональную стипендию для молодых математиков; однако его учеба была прервана Первой мировой войной. Билл служил телефонистом в артиллерийском подразделении и в подразделении разведки во Франции.

В 1919 г. Билл возвратился в Оксфордский университет, окончил его с отличием в 1920 г. и поступил в качестве преподавателя в Бангорский университет (близ Бирмингема). У. Феррер проработал там четыре года, после чего с восторгом принял приглашение Э. Уиттекера стать лектором в Эдинбургском университете. Однако в 1925 г. в Оксфордском университете освободилось место преподавателя «чистой» математики, Феррер переехал в г. Оксфорд и более его не покидал. В 1937 г. он стал казначеем Хертфордского колледжа Оксфордского университета.

В 1947 г. ему по совокупности научных трудов присвоили ученую степень Ph.D. in mathematics. В 1957 г. он решил «уйти на покой», однако его уговорили занять должность директора Хертфордского колледжа, в качестве которого У. Феррер оставался до конца своей жизни.

В 1925–1930 гг. Феррер исследовал кардинальные функции Э. Уиттекера. Затем он занимался теорией чисел, сходимостью рядов, сингулярными интегралами. У. Феррер — автор 10 выдающихся учебников, в том числе по теории сходимости (1938 г.), по алгебре (1941 г.), по матрицам (1951 г.). А лучшие руководства по прикладной математике — «Математика для науки» (1965 г.), «Вычисления для начинающих» (1967 г.) и «Современная математика для науки» (1969 г.) — написаны Феррером, когда ему было уже за 70!

Скончался Уильям Феррер 22 января 1990 г. в Оксфорде.

3. Джон Макнотен Уиттекер (John Macnaughten Whittaker) [19, 22] родился 7 марта 1905 г. в Кембридже в семье сэра Эдмунда Уиттекера и Марии Бойд. Отец Марии был пресвитером в Кембридже (Англия), а ее дед — лордом-мэром Эдинбурга (Шотландия).

Джек (уменьшительное от Джон) учился в колледже Георга Уотсона, в школе Св. Сальватора и в Академии Феттса, а в возрасте 15 лет (в 1920 г.) он поступил в Эдинбургский университет на математический факультет, где преподавал его отец. Решение стать «чистым» математиком далось Джеку нелегко по двум причинам. Во-первых, он серьезно занимался живописью и хотел стать знаменитым художником. А во-вторых, стать тенью своего уже знаменитого отца ему не хотелось.

В 1923 г. Джек поступил в Тринити-колледж Кембриджского университета, который в свое время окончил его отец. В 1927–1929 гг. Джон Уиттекер работал ассистентом преподавателя математики в Эдинбургском университете. В эти же годы он получил ученую степень доктора наук (D.Sc.) и премию Смита. В 1929–1932 гг. он преподавал в колледже Пемброк Кембриджского университета.

В 1933 г. Дж. Уиттекер занял кафедру «чистой» математики в Ливерпульском университете.

В июле 1940 г. он был мобилизован в армию в службу разведки. После прохождения краткосрочных артиллерийских курсов в сентябре 1942 г. он был отправлен служить в Египет. С августа 1943 г. он служил в Англии и занимался оборонными исследованиями. В октябре 1945 г. Дж. Уиттекер возвратился в Ливерпуль «в свое кресло», а затем активно включился в административную деятельность. С 1952 и до 1965 г. он был вице-канцлером Шеффилдского университета. В 1965 г. он ушел на пенсию, а с 1967 г. стал неоплачиваемым (почетным) профессором математики Шеффилдского университета.

Наиболее важные монографии Дж. Уиттекера: «Теория интерполяции функций» (1935 г., переиздание 1964 г.), «Ряды полиномов» (1944 г.), «Ряды, основанные на простых полиномах» (1949 г.). В математике известна постоянная Дж. Уиттекера, хотя она впервые была выведена японцем Такенакой, на что Уиттекер вполне корректно указывал в своей книге 1935 г. [6].

Скончался Джон Уиттекер 29 мая 1984 г. в Шеффилде (Англия).

4. Гарри Найквист (Harry Nyquist) [23, 24] родился 7 февраля 1889 г. в г. Нильсби (Швеция) в семье фермера Лорса Найквиста (Джонсона) и Катерины Эриксдотер. Необыкновенные способности мальчика к математике и к физике заметил один из местных учителей и посоветовал Гарри ехать учиться в Америку. В 1907 г. 18-летним юношей «с 10 долларами в кармане» он отправился в США. Заработав деньги на учебу, Гарри в 1912 г. поступил в Университет штата Сев. Дакота, где уже через два года получил степень бакалавра по специальности инженер-электрик, а еще через год (в 1915 г.) — степень магистра. В 1917 г. в Иельском университете он защитил кандидатскую диссертацию по физике (Ph.D. in physics).

С 1917 по 1954 г. Найквист работал в Отделе развития и исследований компании «Американская телефонная и телеграфная компания» (AT&T), которая в 1934 г. вошла в состав компании «Белловские телефонные лаборатории». Перед уходом на пенсию он занимал должность зам. директора БТЛ по науке. После ухода на пенсию в 1954 г. он проживал в своем доме в местечке Фарр (Pharr), шт. Техас, и продолжал работать в качестве штатного консультанта в нескольких фирмах и в правительстве США.

Г. Найквист — автор 138 изобретений. Он награжден тремя медалями, в том числе престижной медалью Файндера «За фундаментальный вклад в развитие техники», учрежденной Американской национальной инженерной академией. В 1961 г. он был удостоен премии М. Келли «За фундаментальную роль в развитии современной теории систем связи». В теоретической радиотехнике известны критерий устойчивости радиотехнических цепей с обратной связью (Найквиста–Михайлова–Боде), теорема Найквиста о спектральной плотности мощности тепловых шумов резисторов (закон Найквиста–Джонсона), «частота среза» Найквиста.

Скончался Г. Найквист 4 апреля 1976 г. в местечке Фарр.

5. Ральф Винтон Лайон Хартли (Ralph Vinton Lyon Hartley) [25] родился 30 ноября 1888 г. в г. Спрус, шт. Невада (США).

В 1909 г. Ральф получил степень бакалавра гуманитарных наук в университете штата Юта. В 1910 г. Хартли приехал в Великобританию в качестве студента, получающего стипендию Родса в колледже Св. Джонса Оксфордского университета, и в 1912 г. получил там степень бакалавра искусств, а в 1913 г. — бакалавра наук.

Вернувшись в США, он поступил на работу в Научно-исследовательскую лабораторию компании Western Electric. В 1915 г. ему было поручено усовершенствование радиоприемника для испытаний трансатлантического радиотелефона, проводимых компанией Bell System. С этим заданием он блестяще справился.

В годы Первой мировой войны Хартли разработал принципы, которые были положены в основу звуковой пеленгации. После войны он вернулся в Western Electric, а затем перешел в компанию «Белловские телефонные лаборатории», где сформулировал первые положения теории информации (1928 г.). К сожалению, в 1929 г. он серьезно заболел и смог вернуться в БТЛ только через 10 лет — в качестве консультанта.

В годы Второй мировой войны Хартли занимался в БТЛ проблемами серво-механики. В 1950 г. Ральф Хартли ушел на пенсию и стал заниматься волновой механикой и теорией гравитации. В 1942 г. он ввел в прикладную математику так называемое «преобразование Хартли»: разность между вещественной и мнимой частями преобразования Фурье. Десятичные единицы количества информации иногда называют «хартом».

Скончался Р. Хартли 1 мая 1970 г. в штате Нью-Джерси.

6. **Клод Элвуд Шеннон** (Claude Elwood Shannon) [19, 23, 26] родился 30 апреля 1916 г. в г. Петоски (шт. Мичиган, США) в семье бизнесмена Клода Шеннона (1862–1934), бывшего некоторое время помощником судьи, и дочери немецкого эмигранта Мейбл Вольф (1880–1945) — учительницы языка, впоследствии директора средней школы г. Гейлорда. Отец Шеннона приходился дальним родственником знаменитому американскому изобретателю Томасу Эдисону (1847–1931).

Первые 16 лет Клод Шеннон жил в Гейлорде и в 1932 г. окончил местную среднюю школу. В 1936 г. он окончил Мичиганский университет как бакалавр по математике и по электротехнике. В 1940 г. Шеннон защитил кандидатскую диссертацию и получил степень кандидата технических наук и доктора математики (Ph.D. in mathematics) в Массачусетском технологическом ин-те. В своей диссертации он впервые доказал, что работу релейных сетей можно анализировать и синтезировать посредством математического аппарата булевой алгебры.

1940/41 учебный год Шеннон провел как государственный стипендиат в Принстонском университете штата Нью-Джерси, работая под руководством известного математика Германа Вейля. С 1941 по 1972 г. Шеннон работал в Математической лаборатории компании «Белловские телефонные лаборатории». В это время в БТЛ работали всемирно известные радиофизики С. Райе и Г. Найквист, специалист по космической радиосвязи Дж. Пирс, специалист по радиоавтоматике Г. Боде, изобретатели транзисторов лауреаты Нобелевской премии по физике 1956 г. У. Шокли, Дж. Бардин и У. Браттейн, изобретатель релейного компьютера Г. Стибиц и другие известные ученые и инженеры. Шеннон занимался также разработкой автоматов для жонглирования и летающего диска с ракетным двигателем.

С 1956 г. К. Шеннон — член Национальной Академии наук США. С 1957 по 1978 г. Шеннон занимал должность профессора электротехники и математики в МТИ. В 1965 г. он приезжал с докладом на научно-техническую конференцию в Советский Союз и был избран почетным членом АН СССР. Партию игры в шахматы с чемпионом мира М. Ботвинником К. Шеннон проиграл на 42-м ходу.

За работы в области теории информации К. Шеннону были присуждены премии Института электрорадиоинженеров (США, 1949 г.), Харвея (Израиль, 1972 г.), Университета Киото (Япония, 1985 г.), фонда Эдуарда Рейна (Германия, 1991 г.). Кроме того, Шеннон награжден многими медалями, в том числе Национальной медалью США по науке (1966 г.).

В конце жизни Клода Шеннона постигло большое несчастье — болезнь Альцгеймера — и 24 февраля 2001 г. он умер в массачусетском доме для престарелых.

Литература

1. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. США, 1961 — 1968 гг. / Пер. и науч. обработка М.К. Размахнина и В.П. Яковлева. М.: Сов. радио, 1971.
2. *Meijering E.* // Proc. IEEE. 2002. V. 90. № 3. P. 319.
3. *Whittaker E.T.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1914–1915. V. 35. Pt. 2. P. 181.
4. *Ferrar W.L.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1925. V. 45. P. 269; 1925. V. 46. P. 323.
5. *Ferrar W.L.* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1927. V. 47. P. 230.
6. *Whittaker J.M.* Interpolatory function theory. London etc.: Cambr. Univ. Press, 1935. (Репринт, изд.: New-York — London: Stechert-Hafner, 1964.)
7. *Котельникова Н.В.* // УФН. 2006. Т. 176. № 7. С 753.
8. *Котельников В.А.* // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Изд-во Управления связи РККА, 1933. (Факсимил. переизд. // Радиотехника. 1995. № 4–5. С. 42.); Сборник научных трудов. Т. 1. М.: Физматлит, 2008.
9. *Nyquist H.* // Trans. AIEE. 1928. V. 47. №2. P. 617. (Репринт. изд.: Proc. IEEE. 2002. V. 90. № 2. P. 280.)
10. *Котельников В.А.* Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. (Репринт. изд. М.: Радио и связь, 1998.); Сборник научных трудов. Т. 2. М.: Физматлит, 2008.
11. *Whittaker J.M.* // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1929. V. l, pt. 1. P.41.
12. *Whittaker J.M.* // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1929. V. 1, pt. 2. P. 169.
13. *Nyquist H.* // Bell Syst. Tech. J. 1924. V. 3. № 2. P. 324.
14. *Hartley R.V. L.* //Bell Syst. Tech. J. 1928. V. 7. №3. P. 535. (Рус. пер.: Теория информации и ее приложения (Сб. переводов) / Под ред. А.А. Харкевича. М.: Физматгиз, 1959. С. 5.)
15. *Феер К.* Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра. М.: Радио и связь, 2000.
16. *Shannon C.* // Proc. IRE. 1949. V. 37. № 1. P. 10. (Рус. пер.: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 433. Репринт, изд.: Proc. IEEE. 1998. V. 86. № 2. P. 447.)
17. *Shannon C.* // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. № 3. P. 379; № 4. P. 623. (Рус. пер.: *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. С. 241.)
18. WWW.en.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon sampling theorem.
19. Математика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 2000.
20. The Dictionary of National Biography. 1951–1960. Oxford: Oxford Univ. Press, 1971. P. 1049.
21. WWW.history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fer-rar
22. WWW.en.wikipedia.org/wiki/J.M. Whittaker
23. *Быховский МЛ.* Пионеры информационного века. История развития теории связи. М.: ЗАО «РИЦ “Техносфера”», 2006.
24. WWW.en.wikipedia.org/wiki/Harry Nyquist
25. WWW.en.wikipedia.org/wiki/R. Hartley
26. WWW.research.att.com/~njas/doc/shannonbio